## Задача 1.

Перевести шестнадцатеричное число А16 = 4AF,C48 в десятичную систему счисления.

**Решение.**

1) 4AF = $4 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$ = 4·256 + 10·16 + 15·1 = 1024 + 160 + 15 = 1199

2) 0,C48 = 12·16-1 + 4·16-2 + 8·16-3 = 12·(1/16) + 4·(1/16/16) +8·(1/16/16/16) = 3·(1/4) + 1·(1/4/16) + 1·(1/2/16/16) =
= (3/4) + (1/64) + (1/512) = 0,75 + 0,015625 + 0,001953125 = 0,767578125

Ответ: А10 = 1199,767578125.

## Задача 2.

Найти сумму шестнадцатеричных чисел, используя 16-разрядный сумматор, старший разряд которого знаковый. Ответ дать в шестнадцатеричной форме. Числа со знаком, выражаемые с использованием 16 двоичных разрядов, должны находиться между –32768 и 32767. При переполнении разрядной сетки ответ сопроводить сообщением.

**Решение.**

Заменяем операцию вычитания А – В на операцию алгебраического сложения А + (–В) путем замены знака вычитаемого на противоположный и прибавлением его к уменьшаемому.

Например.

1) B = 0,100 1101 1101 0011, тогда –B = 1,100 1101 1101 0011
2) B = 1,100 1101 1101 0011, тогда –B = 0,100 1101 1101 0011

При сложении чисел может возникнуть переполнение разрядной сетки. Для обнаружения переполнения вводим вспомогательный разряд в знаковую часть изображения числа: "00" соответствует знаку "+", "11" – знаку "–". Любая другая комбинация ("01" или "10"), получившаяся в знаковых разрядах служит признаком переполнения разрядной сетки.

**Сумма чисел $A_{16}$ = 3A8 и $B_{16}$ = 102**

1) [A2]пр = 0,000 0011 1010 1000 [B2]пр = 0,000 0001 0000 0010
2) [A2]пр м = 00,000 0011 1010 1000 [B2]пр м = 00,000 0001 0000 0010
3) [A2]пр м + [B2]пр м = 00,000 0011 1010 1000 + 00,000 0001 0000 0010 = 00,000 0100 1010 1010
4) [C2]пр = 0,000 0100 1010 1010

Ответ: $C_{16}$ = 4AA.

**Разность чисел $A_{16}$ = 2284 и $B_{16}$ = 4DD3**

1) [A2]пр = 0,010 0010 1000 0100 [B2]пр = 0,100 1101 1101 0011 **(заменяем знак)**
2) [A2]пр = 0,010 0010 1000 0100 [–B2]пр = 1,100 1101 1101 0011
3) [A2]д = 0,010 0010 1000 0100 [-B2]д = 1,011 0010 0010 1101 **(дополнительный код)**
4) [A2]д м = 00,010 0010 1000 0100 [-B2]д м = 11,011 0010 0010 1101
5) [A2]д м + [-B2]д м = 00,010 0010 1000 0100 + 11,011 0010 0010 1101 = **11**,101 0100 1011 0001

Результат операции – отрицательное число, следовательно, переводим его в прямой код, не затрагивая знаковый разряд.

6) [C2]пр = 1,010 1011 0100 1111

Ответ: $C_{16}$ = AB4F

**Сумма чисел $A_{16}$ = 3C14 и $B_{16}$ = 89AC**

1) [A2]пр = 0,011 1100 0001 0100 [B2]пр = 1,000 1001 1010 1100 **(рассматриваем число как отрицат.)**
2) [A2]д = 0,011 1100 0001 0100 [B2]д = 1,111 0110 0101 0100 **(дополнительный код)**
3) [A2]д м = 00,011 1100 0001 0100 [B2]д м = 11,111 0110 0101 0100
4) [A2]д м + [B2]д м = 00,011 1100 0001 0100 + 11,111 0110 0101 0100 = 00,011 0010 0110 1000
5) [C2]пр = 0,011 0010 0110 1000

Ответ: $C_{16}$ = 3268

**Разность чисел $A_{16}$ = 34C5 и $B_{16}$ = FF12**

1) [A2]пр = 0,011 0100 1100 0101 [B2]пр = 1,111 1111 0001 0010 **(заменяем знак)**
2) [A2]пр = 0,011 0100 1100 0101 [–B2]пр = 0,111 1111 0001 0010
3) [A2]д = 0,011 0100 1100 0101 [–B2]д = 0,111 1111 0001 0010
4) [A2]д м = 00,011 0100 1100 0101 [–B2]д м = 00,111 1111 0001 0010
5) [A2]д м + [-B2]д м = 00,011 0100 1100 0101 + 00,111 1111 0001 0010 = **01**,011 0011 1101 0111

Ответ: Положительное переполнение

## Задача 3.

Дано выражение, в котором используются операции над булевскими величинами, принимающими значения 0 (ложь) и 1 (истина). Выражение может содержать круглые скобки и следующие знаки операций: отрицание (¬), конъюнкция (∧), дизъюнкция (∨), импликация (→). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (¬), уровень 2 (∧), уровень 3 (∨), уровень 4 (→).

Построить таблицу истинности для выражения $(p \to q) \land (\neg r \to (\neg p \lor \neg q))$.

## Задача 4.

Дано выражение, в котором используются поразрядные операции над 8-ми разрядными целыми числами без знака. В выражении используются круглые скобки и следующие знаки операций: поразрядное НЕ (~), поразрядное И (&), поразрядное ИЛИ (|), поразрядный сдвиг влево (<>). Операции имеют следующие уровни приоритета: уровень 1 (~), уровень 2 (<< и >>), уровень 3 (&), уровень 4 (|). Вычислить значение следующего выражения:

a >> 2 & b << 1 | ~(a << 2 & b >> 1) для a = 204 и b = 170. Ответ дать в двоичной и десятичной формах.

**Решение.**

1) a = $cc_{16} = 11001100_2$
2) b = $aa_{16} = 10101010_2$
3) a >> 2 = $33_{16} = 00110011_2$
4) b << 1 = $54_{16} = 01010100_2$
5) a >> 2 & b << 1 = $10_{16} = 00010000_2$
6) a << 2 = $30_{16} = 00110000_2$
7) b >> 1 = $55_{16} = 01010101_2$
8) a << 2 & b >> 1 = $10_{16} = 00010000_2$
9) ~(a << 2 & b >> 1) = $ef_{16} = 11101111_2$
10) a >> 2 & b << 1 | ~(a << 2 & b >> 1) = $ff_{16} = 11111111_2$

Ответ: $11111111_2 = 255_{10}$.

## Задача 5.

1) Дана инфиксная запись арифметического выражения (a + b) * ((((e – f) + g) / h) – i). Найти префиксную запись этого выражения.

**Решение.**

Перепишем арифметическое выражение, поставив перед скобками знак арифметической операции, который выполняется в скобках:

* ( + (a + b) * – (/ (+ (– (e – f) + g) / h) – i))

Переписываем выражение, удалив скобки и знаки операций внутри скобок.

Ответ: * + a b – / + – e f g h i.

2) Дана инфиксная запись арифметического выражения (((a + b) – c) * d) / (e – (f * (g + h))). Найти постфиксную запись этого выражения.

Ответ: a b + c – d * e f g h + * – /

3) Дана префиксная запись арифметического выражения + a * b + c * d + e * f + g * h i. Найти инфиксную запись этого выражения, **не содержащую лишних круглых скобок**.

Ответ: a + b * (c + d * (e + f * (g + h * i))).

4) Дана постфиксная запись арифметического выражения a b + c * d + e * f + g * h + i *. Найти инфиксную запись этого выражения, **не содержащую лишних круглых скобок**.

Ответ: ((((a + b) * c + d) * e + f) * g + h) * i.

5) Дана префиксная запись арифметического выражения: + * + * + * + * + x a x b x c x d x e. Вычислить вручную значение этого выражения для x=3, a=5, b=4, c=3, d=2, e=1.

Ответ: 790.

## Задача 6.

1) Сколько существует положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых

a) Первой цифрой является 3?
b) Последней цифрой является 5?
c) Первой цифрой является 3 или последней цифрой является 5?
d) Ни первая цифра не равна 3, ни последняя цифра не равна 5?

**Решение.**

| Количество цифр в числе | Количество положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр | Первой цифрой является 3 | Последней цифрой является 5 | Первой цифрой является 3 и последней цифрой является 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 90 | 10 | 9 | 1 |
| 3 | 900 | 1*10*10=100 | 9*10*1=90 | 1*10*1=10 |
| 4 | 9000 | 1*10*10*10=1000 | 9*10*10*1=900 | 1*10*10*1=100 |
| 5 | 90000 | 1*10*10*10*10=10000 | 9*10*10*10*1=9000 | 1*10*10*10*1=1000 |
| **Всего** | **99999** | **11111** | **10000** | **1111** |

Количество положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых первой цифрой является 3 или последней цифрой является 5, равно 11111 + 10000 – 1111 = 20000.

Количество положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых ни первая цифра не равна 3, ни последняя цифра не равна 5, равно 99999 – 20000 = 79999

Ответ: a) 11111; b) 10000; c) 20000; d) 79999.

2) Сколько существует положительных пятизначных целых чисел, которые

a) Начинаются с 3?
b) Заканчиваются на 5?
c) Содержат цифру 7?
d) Начинаются с 3 и заканчиваются на 5 или содержат цифру 7?

**Решение.**

| Количество цифр в числе | Количество пятизначных цифр | Первой цифрой является 3 | Последней цифрой является 5 | Первая цифра 3 и последняя 5 и не содержат цифру 7 | Не содержат цифру 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 99999 – 10000 + 1 = 90000 | 39999 – 30000 + 1 = 10000 | 1000*9=9000 | 1*9*9*9*1=729 | 8*9*9*9*9=52488 |

Количество пятизначных чисел, которые содержат цифру 7 = 90000 – 52488 = 37512.

Тогда количество положительных пятизначных целых чисел, которые начинаются с 3 и заканчиваются на 5 или содержат цифру 7, равно 729 + 37512 = 38241.

Ответ: a) 10000; b) 9000; c) 37512; d) 38241

3) Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих хотя бы одну цифру 6?

**Решение.**

| Количество цифр в числе | Количество целых чисел | Нет цифры 6 |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 9 |
| 2 | 99 | 8*9=72 |
| 3 | 999 | 8*9*9=648 |
| | | 9+72+648=730 |

Количество чисел от 0 до 1000 равно 1001, тогда количество чисел, которое не содержит цифру 6 будет

1001 – 730 = 271

Ответ: 271

4) Сколько существует шестизначных чисел, если первая цифра разряда может быть нулем, цифры не должны повторяться для трех случаев:

a) последние две цифры должны быть 7 и 8 в любом порядке?
b) первая цифра должна быть 1, а цифры 7 и 8 должны стоять рядом в указанном порядке?
c) цифры 7 и 8 должны стоять рядом в любом порядке?

Ответ: a) 8*7*6*5 + 8*7*6*5 = 3360; b) 8!/4! = 8*7*6*5 = 1680; c) 9!/4!*2! = 9*8*7*6*5*2= 30240.

5) Сколько существует трехзначных чисел, если

a) используются цифры 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, где цифры не должны повторяться?
b) сколько таких трехзначных чисел меньше 450?

c) сколько таких трехзначных чисел делится на 4.

Ответ: a) 7*6*5 = 210; b) 2*(6!/4!) + 2*5 = 2*30+2*5 = 60 + 10 = 70; c) (4*(6!/4!))/2 = 4*30/2 = 60

6) Сколько существует положительных целых чисел между 1 и 2003, которые

a) Делятся на 5?
b) Делятся на 7?
c) Делятся на 11?
d) Делятся на 5 или 7 или 11?

**Решение.**

| Целые числа, которые делятся на | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 11 | 5 и 7 | 7 и 11 | 11 и 5 | 5 и 7 и 11 |
| [2003/5]= 400 | [2003/7]= 286 | [2003/11]= 182 | [2003/(5*7)]= 57 | [2003/(7*11)]= 26 | [2003/(5*11)]= 36 | [2003/(5*7*11)]= 5 |

Следовательно, количество целых чисел, которые делятся

или на 5, или на 7, или на 11 равно 400 + 286 + 182 – 57 – 26 – 36 + 5 = 754.

Ответ: a) 400; b) 286; c) 182; d) 754.

## Задача 7.

1) На книжной полке расположены книги по математике, физике, информатике и химии. Какая книга будет выбрана при одновременном выполнении следующих условий:

a) если не выбирается информатика, то не выбирается физика;
b) не верно, что если выбирается химия, то выбирается информатика;
c) если выбирается математика, то выбирается физика.

**Решение.**

$(\neg И \to \neg Ф) \wedge \neg(Х \to И) \wedge (М \to Ф) = (И \vee \neg Ф) \wedge (Х \wedge \neg И) \wedge (\neg М \vee Ф)$

$(И \vee \neg Ф) \wedge Х \wedge \neg И = (И \wedge \neg И) \vee (\neg Ф \wedge \neg И) \wedge Х = 0 \vee (\neg Ф \wedge \neg И) \wedge Х = \neg Ф \wedge \neg И \wedge Х$

$\neg Ф \wedge \neg И \wedge Х \wedge (\neg М \vee Ф) = \neg И \wedge Х \wedge (\neg М \vee Ф) \wedge \neg Ф = \neg И \wedge \mathbf{Х} \wedge \neg М \wedge \neg Ф$

Ответ: Химия.

2) Предположим, что из 100 опрошенных студентов 50 изучают химию, 53 – математику, 42 – физику, 15 – химию и физику, 20 занимаются физикой и математикой, 25 – математикой и химией и 5 студентов изучают все три предмета.

a) Сколько студентов изучают хотя бы один из трех перечисленных предметов?
b) Сколько студентов не изучают ни один из трех перечисленных предметов?
c) Сколько студентов изучают только математику?
d) Сколько студентов изучают физику или химию, но не изучают математику?

Ответ: a) 90; b) 10; c) 13; d) 37

3) Согласно опросу 250 телезрителей, 95 из них нравится смотреть новости, 125 предпочитают смотреть спорт, 125 – комедии, 25 – новости и комедии, 45 спорт и комедии, 35 – новости и спорт, 5 любят все три вида программ.

a) Сколько телезрителей смотрят новости, но не смотрят спорт?
b) Сколько телезрителей смотрят новости или спорт, но не любят комедии?
c) Сколько телезрителей не любят смотреть ни новости, ни спорт?
d) Сколько телезрителей смотрят спорт и комедии, но не смотрят новости?

Ответ: a) 60; b) 120; c) 65; d) 40

4) Укажите наибольшее целое число X, при котором логическое выражение
$(50 < X*X) \to (50 > (X+1)*(X+1))$ истинно.

Ответ: 7.

## Задача 8.

1) Предположим, что команды А и В играют между собой в турнире по бейсболу. Для победы в турнире команде необходимо выиграть три игры из пяти. Предположим, известно, что команда В выиграла первую игру. Сколько вариантов победы осталось у команды А и сколько у команды В?

**Решение.**

Выигрыш В (6):

| | | |
|---|---|---|
| 1 – 2 – 3 | 1 – 3 – 4 | 1 – 4 – 5 |
| 1 – 2 – 4 | 1 – 3 – 5 | |
| 1 – 2 – 5 | | |

Выигрыш А (4):

| | |
|---|---|
| 2 – 3 – 4 | 3 – 4 – 5 |
| 2 – 3 – 5 | |

Ответ: 4 и 6.

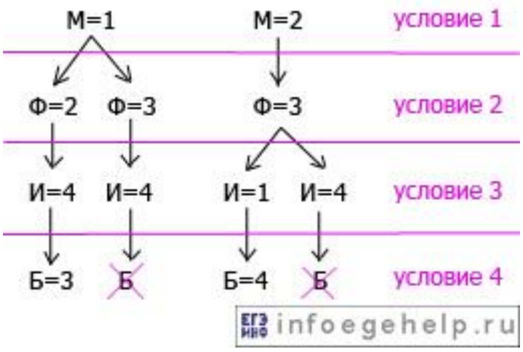
2) Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея среди членов клуба, включающего 8 студентов последнего курса, 10 студентов предпоследнего курса, 15 второкурсников и 20 первокурсников, если

a) отсутствуют какие-либо ограничения?
b) президентом должен быть студент последнего курса?
c) первокурсники могут быть избраны только на должность секретаря?

Ответ: a) 53*52*51*50 = 7027800; b) 8*52*51*50 = 1060800; c) 33*32*20*31 + 33*32*31*30 = 1636800.

3) В понедельник в одном из классов должно быть проведено 4 урока – по математике, физике, информатике и биологии. Учителя высказали свои пожелания для составления расписания. Учитель математики хочет иметь первый или второй урок, учитель физики - второй или третий урок, учитель информатики – первый или четвертый, учитель биологии – третий или четвертый. Сколько вариантов расписания устроит всех учителей школы?

**Решение.**




Ответ: 2.

4) Пять команд: A, B, C, D и E, соревнуются между собой по волейболу. Один человек предсказал такой результат соревнований (начиная с первого места): ABCDE, другой: BDEAC. Первый человек угадал правильные места только для трех команд, а второй – только для двух. Найдите для каждой команды ее истинное место. В ответе перечислите подряд без пробелов буквы, соответствующие местам команд.

Ответ: ABEDC.

5) На книжной полке требуется расположить 5 различных книг по математике, 3 различные книги по физике и 2 различные книги по информатике. Сколькими способами это возможно сделать, если

a) не существует никаких ограничений?
b) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе?
c) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе, но математические книги и книги по информатике не должны стоять рядом?

**Решение.**

a) Всего книг 5 + 3 + 2 =10. Следовательно, различных перестановок 10! = 3628800

b) Три предмета (математика, физика, информатика). Следовательно, количество перестановок предметов 3! Но по каждому предмету книги тоже можно переставить. Количество перестановок книг по математике 5!, по физике 3!, по информатике 2! В результате получится 3!*5!*3!*2! = 6*120*6*2 = 8640.

c) Если книги по математике и информатике не должны стоять вместе, но все книги стоят вместе, то возможны только 2 перестановки: МФИ и ИФМ, но внутри предметов возможны различные перестановки, следовательно, 2*5!*3!*2! = 2880

Ответ: a) 3628800; b) 8640; c) 2880.

6) Сколько существует перестановок букв o, n, t, h, e, g, r, i, d, если

- a) не существует никаких ограничений?
- b) последовательности букв образуют слова "on", "the" и "grid" в любом порядке?
- c) последовательности букв не образуют слова ни "on", ни "the", ни "grid"?

a) Всего букв 9. Следовательно, различных перестановок 9! = 362880

b) Всего 3 слова, следовательно, различных перестановок 3! = 6

c) 9! – 8! – 7! – 6! – 3! + 6! + 5! + 4! = 362880 – 45222 = 317658

Ответ: a) 362880; b) 6; c) 317658.

7) Шесть мальчиков и шесть девочек идут на концерт вместе. Сколькими способами они могут занять места, если

- а) все мальчики сядут вместе?
- б) два мальчика сядут по краям?
- в) ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе?

**Решение.**

Всего 12 человек. Следовательно, различных перестановок 12!

a) Количество размещений мальчиков и девочек, когда мальчики будут сидеть вместе: 6!*7!.

Количество размещений мальчиков и девочек, когда девочки будут сидеть вместе: 6!*7!.

b) Двух мальчиков можно посадить по краям 6!/(6-2)! = 6!/4! = 30 способами. Количество размещений мальчиков и девочек, когда два мальчика будут сидеть по краям равно 30*10!.

c) Количество размещений мальчиков и девочек, когда ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе: 12! – (6!*7! + 6!*7! – 2*6!*6!).

Ответ: а) 6!*7!; б) 30*10!; в) 12! – (2*6!*7! – 2*6!*6!).

8) Сколькими способами можно расположить для фотографирования пять мальчиков и пять девочек, если

- a) не существует никаких ограничений?
- b) ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?
- c) все девочки должны стоять рядом?

Ответ: a) 10! = 3628800; b) 5!*5! + 5!*5! = 28800; c) 6!*5! = 86400.

## Задача 9.

Используется число Каталана

**C(n) = (2*n)! / (n! * (n+1)!) – количество бинарных деревьев из N вершин.**

- Количество правильных скобочных последовательностей, составленных из n пар скобок.
- Монотонные пути в квадрате – маршруты из левого нижнего угла квадрата в правый верхний, которые идут по линиям сетки вверх или вправо и не заходят выше диагонали.
- Количество способов разбить (n + 2)-угольник на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями.
- Количество способов соединить 2n точек, расположенных на окружности, n отрезками, не имеющими общих точек.
- Таблица Юнга – прямоугольник, заполненный последовательными числами так, чтобы они возрастали во всех строках и столбцах.
- Количество бинарных деревьев с заданным числом листьев.

1) Определить количество правильных скобочных последовательностей длины 8, то есть таких последовательностей из 4 левых и 4 правых скобок, в которых количество открывающих скобок равно количеству закрывающих, и в любом её префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

**Решение.**

C(n) — это количество „правильных “ скобочных структур из 2n скобок (n открывающих и n закрывающих).

Ответ: 14

2) Определить количество способов расстановки скобок в произведении x0*x1*x2*x3*x4 так, чтобы порядок умножений был полностью определен.

**Решение.**

Для решения потребуется 4 открывающиеся и 4 закрывающиеся скобки.

C(n) — это количество „правильных “ скобочных структур из 2n скобок (n открывающих и n закрывающих).

Ответ: 14

3) Сколько последовательностей {a1, a2, …, a8}, состоящих из +1 и –1, обладают тем свойством, что a1 + a2 + … + a8 = 0, а все их частичные суммы a1, a1 + a2, …, a1 + a2 + … + a8 неотрицательны?

**Решение.**

Задачу можно решить методом полного перебора, который дает 14 вариантов:

+1+1+1+1-1-1-1-1,
+1+1+1-1+1-1-1-1,
+1+1+1-1-1+1-1-1,
+1+1+1-1-1-1+1-1,
+1+1-1+1+1-1-1-1,
+1+1-1+1-1+1-1-1,
+1+1-1+1-1-1+1-1,
+1+1-1-1+1+1-1-1,
+1+1-1-1+1-1+1-1,
+1-1+1+1+1-1-1-1,
+1-1+1+1-1+1-1-1,
+1-1+1+1-1-1+1-1,
+1-1+1-1+1+1-1-1,
+1-1+1-1+1-1+1-1.

Или увидев аналогию с задачей о правильной скобочной последовательности. Можно применить число Каталана C(4) = 14.

Ответ: 14

4) Определить количество способов соединения восьми точек на окружности четырьмя непересекающимися хордами.

**Решение.**

Пусть an — количество способов соединить 2n точек на окружности n непересекающимися хордами.

Фиксируем одну из данных 2n точек. Хорда, выходящая из неё, делит окружность на две дуги, причём на каждой дуге расположено чётное число данных точек.

Если на одной дуге расположено 2k точек, то на другой – 2(n–k–1) точек;

эти точки можно соединить непересекающимися хордами (не пересекающими первую хорду)

$a_{n-k-1}\, a_k$ способами. Осталось просуммировать по k от 0 до 2n–2.

Таким образом, $a_3 = 2a_2 + a1^2 = 5$,

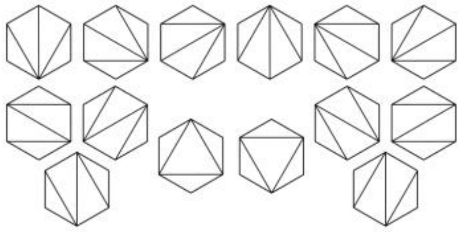
$a_4 = 2a_3 + 2\, a_1\, a_2 = 14$.

Ответ: 14

5) Сколько существует способов разбиения выпуклого шестиугольника на треугольники, путем соединения вершин шестиугольника с использованием трех непересекающихся отрезков.

**Решение.**

Количество разбиений выпуклого (n + 2) – угольника на n треугольников непересекающимися диагоналями равно числу Каталана C(n).



Ответ: 14

6) Рассмотрим шахматную доску со стороной 6. Требуется провести ладью из левого нижнего угла в правый верхний угол. Двигаться можно только вверх и вправо, не заходя при этом на клетки диагонали, соединяющей начальную и конечную клетки, и ниже нее. (Ладья оказывается на этой диагонали только в начальный и конечный моменты времени.) Сколько существует таких маршрутов?

**Решение.**

a) Заполняем нулями все запрещенные клетки.

b) Начиная с левого нижнего угла, заполняем единицами всю левую вертикаль.

c) Далее заполняем вторую слева вертикаль по следующему правилу: в очередной клетке ставим сумму чисел, стоящих в двух соседних клетках – снизу и слева, и так далее. Таким образом, мы находим, что искомое число маршрутов равно 14.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 14 | 14 | 14 |
| 1 | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

## Задача 10.

Функция S определена рекурсивно для неотрицательных целых чисел n и k следующим образом:
S(0, 0) = 1;
**S(n, 0) = 0 для n > 0;**
S(n, k) = S(n-1, k-1) + k*S(n-1, k) для 0 < k < n.
Очевидно, что **S(n, 1) = 1 при n > 0**;
**S(n, n) = 1;**
S(n, k) = 0 при k > n. Вычислить вручную S(6, 4).

Решение.

Производим вычисления по формуле и результаты заносим в таблицу размером 7x7. В итоге будет получен следующий треугольник:

S(3, 2) = S(2, 1) + 2*S(2, 2) = 3

S(4, 2) = S(3, 1) + 2*S(3, 2) = 7

. . .

| n | k | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | **1** | | | | | | |
| 1 | **0** | **1** | | | | | |
| 2 | **0** | **1** | **1** | | | | |
| 3 | **0** | **1** | 3 | **1** | | | |
| 4 | **0** | **1** | 7 | 6 | **1** | | |
| 5 | **0** | **1** | 15 | 25 | 10 | **1** | |
| 6 | **0** | **1** | 31 | 90 | **65** | | **1** |

Ответ: 65

## Задача 11.

1) Определите, что будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

```
var a: byte=110;
b: byte=11;
begin
   writeln (byte(not(byte(a shr 2) or byte(b shl 2))) and ((a and byte(not b)) or (byte(not a) and b)) );
end.
```

**Решение.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $110_{10}$ | $01101110_2$ | not a | $10010001_2$ | a shr 2 | $00011011_2$ |
| b | $11_{10}$ | $00001011_2$ | not b | $11110100_2$ | b shl 2 | $00101100_2$ |
| | | | | | (a shr 2) or (b shl 2) | $00111111_2$ |
| | | | | | not ((a shr 2) or (b shl 2)) | $11000000_2$ |
| | | | | | | |
| | | | | | (a and not b)or(not a and b) | $01100101_2$ |
| | | | | | Результат | $01000000_2$ $64_{10}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | $01101110_2$ | b | $00001011_2$ |
| not b | $11110100_2$ | not a | $10010001_2$ |
| a and not b | $01100100_2$ | not a and b | $00000001_2$ |

Ответ: 64

2) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующей программы:

```
function f(x: integer): integer;
begin
   f:= 16*(9-x)*(9-x)+127;
end;
var a, b, p, n, t: integer;
begin
   a:=-10; b:=10; p:=130; n:=0;
   for t:=a to b do if (f(t) > p) then n:=n+1;
   writeln(n);
end.
```

Решение.

От –10 до 10 определяется количество x, удовлетворяющих условию $16*(9-x)^2+127>130$ или $16*(9-x)^2>3$. Это справедливо для всех значений кроме x=9 (0>3), т.е. 20 значений.

Ответ: 20.

3) Чему будет равна сумма элементов матрицы A после выполнения следующей программы:

```
const n=9;
 var A: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
 i, k: integer;
 begin
for i:=0 to n-1 do
   for k:=0 to n-1 do A[i,k]:=0;
for i:=0 to n-1 do
   if (i <= n div 2) then
      for k:=i to n-i-1 do A[i,k]:=1
            else
      for k:=n-i-1 to i do A[i,k]:=1;
end.
```

Ответ: 49

4) Выпишите элементы главной диагонали матрицы D в конце выполнения следующей программы:

```
const n=5;
var D: array[0..n-1,0..n-1] of integer;
var i, j, k, l: integer;
begin
   k:=0; l:=0;
   for i:=0 to n-1 do
```

```
    for j:=0 to n-1 do
      if ((i+j) mod 2 = 0) then
         begin k:=k+1; D[i,j]:=k; end
            else begin l:=l-1; D[i,j]:=l; end;
  for k:=0 to 1 do
    for i:=0 to n-1 do
      for j:=0 to n-1 do D[i,j]:=min(D[i,j], D[i,k]+D[k,j]);
end.
```

Ответ: -4 -8 -26 -30 -32.

### Перестановки

Пусть имеется n различных объектов.
Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются **перестановками**, а их число равно

$P_n = n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$

**Пример** всех перестановок из n=3 объектов (различных фигур) - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно P3=3!=1·2·3=6.

### Перестановки с повторениями

Сколькими способами можно переставить буквы в слове «математика»?
Решение. В этом слове буква «м» повторяется 2 раза, «а» - 3 раза, «т» -2, «е», «к», «и» - по одному разу, по формуле получим
$P(1,1,1,2,2,3) = 10! / (2!*3!*2!*1!*1!*1!) = 151200$.

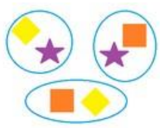
### Размещения

Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются **размещениями** из n объектов по m, а их число равно

$A^m_n = n!/(n-m)! = n\cdot (n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)$

**Пример** всех размещений из n=3 объектов (различных фигур) по m=2 - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $A^2_3=3\cdot(3-2+1)=3\cdot 2=6$.

### Сочетания



Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются **сочетаниями** из n объектов по m, а их число равно

$C^m_n=n!/((n-m)!\cdot m!)$

**Пример** всех сочетаний из n=3n объектов (различных фигур) по m=2 - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $C^2_3=3!/((3-2)!\cdot 2!) =3$. Ясно, что сочетаний всегда меньше чем размещений (так как при размещениях порядок важен, а для сочетаний - нет), причем именно в m! раз, то есть верна формула связи:

$A^m_n=C^m_n\cdot P_m$.