Поразрядная конъюнкция

Для преобразования выражений полезно следующее свойство:

$Z_K \wedge Z_M = Z_{K \text{ or } M}$

где «or» означает поразрядную дизъюнкцию между двумя натуральными числами.

Р-24. *Введём выражение М & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение*

$$((x \,\&\, 28 \neq 0) \vee (x \,\&\, 45 \neq 0)) \to ((x \,\&\, 48 = 0) \to (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) Введём обозначения:
   $Z_{28} = (x \,\&\, 28 = 0)$, $Z_{45} = (x \,\&\, 45 = 0)$, $Z_{48} = (x \,\&\, 48 = 0)$, $\mathbf{A} = (x \,\&\, a = 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации:
   $$(\overline{Z}_{28} + \overline{Z}_{45}) \to (Z_{48} \to \overline{A}) = \overline{\overline{Z}_{28} + \overline{Z}_{45}} + (Z_{48} \to \overline{A}) = Z_{28} \cdot Z_{45} + \overline{Z}_{48} + \overline{A}$$
3) перейдем к импликации, используя закон де Моргана:
   $$Z_{28} \cdot Z_{45} + \overline{Z}_{48} + \overline{A} = \overline{Z_{48} \cdot A} + Z_{28} \cdot Z_{45} = (Z_{48} \cdot A) \to Z_{28} \cdot Z_{45}$$
4) преобразуем выражение в правой части по формуле $Z_K \cdot Z_M = Z_{K \text{ or } M}$, выполнив поразрядную дизъюнкцию (операцию ИЛИ):
   ```
         28 = 011100
         45 = 101101
   28 or 45 = 111101 = 61
   ```
   получаем $(Z_{48} \cdot A) \to Z_{61}$
5) для того, чтобы выражение $(Z_{48} \cdot A) \to Z_{61}$ было истинно для всех x, нужно, чтобы двоичная запись числа 48 **or** a содержала все единичные биты числа 61. Таким образом, с помощью числа а нужно добавить те единичные биты числа 61, которых «не хватает» в числе 48:
   ```
   48 = 110000
    a = **11*1
   61 = 111101
   ```
   биты, обозначенные звездочками, могут быть любыми.
6) поскольку нас интересует минимальное значение a, все биты, обозначенные звездочкой, можно принять равными нулю.
7) получается А = $2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$
8) Ответ: 13.

Из материалов сайта http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm