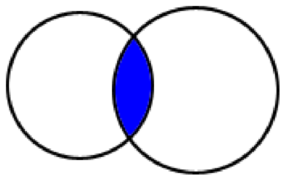
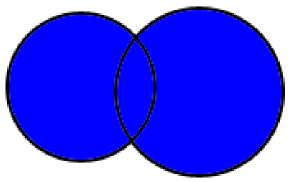
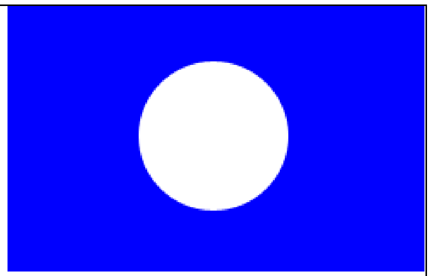
Алгебра логики

Основные логические операции

Конъюнкция conjunctio – связываю	**Дизъюнкция** disjunctio – различаю	**Инверсия** inversio – переворачиваю
Операция логического умножения	Операция логического сложения	Операция логического отрицания
И	**ИЛИ**	**НЕ**
$\wedge$ **, &, and**	$\vee$ **, !, or**	**¬, not**
Конъюнкция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда истины оба высказывания.	**Дизъюнкция** высказываний истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний.	**Инверсия** высказывания истинна, когда это высказывание ложно, и ложно, когда это высказывание истинно.







Таблицы истинности

A	B	A $\wedge$ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A $\vee$ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	¬A
0	1
1	0

Примеры

A = На столе лежит ручка.
B = На столе лежит тетрадь

A $\wedge$ B = На столе лежит ручка И На столе лежит тетрадь

A = В школу я еду на автобусе.
B = В школу я еду на трамвае.

A $\vee$ B = В школу я еду на автобусе ИЛИ В школу я еду на трамвае.

A = В школе я изучаю информатику.

¬A = В школе я не изучаю информатику

Общие правила построения таблицы истинности

<table>
<tr><th>Последовательность действий</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td></td><td>$F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$</td></tr>
<tr><td>Определяем количество переменных в логической функции – N.</td><td>N = 3</td></tr>
<tr><td>Определить количество строк (Q) в таблице:
$Q = 2^N$</td><td>$Q = 2^3 = 8$</td></tr>
<tr><td>Определяем количество логических операций (К) и последовательность их выполнения.</td><td>$F(A,B,C) = \underbrace{A \vee (\underbrace{\underbrace{\overline{C}}_{1} \wedge B}_{2})}_{3}$

K = 3</td></tr>
<tr><td>Определяем количество столбцов:
N + K</td><td>N + K = 6</td></tr>
<tr><td>Заполняем исходные данные таблицы:
1. разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю половину 0, нижнюю половину 1;</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2. в следующей колонке для второй переменной половинку снова делить пополам и заполнить четырьмя группами 0 и 1 вперемежку, начиная опять с группы 0;

A	B	C	1	2	3
0	0				
0	0				
0	1				
0	1				
1	0				
1	0				
1	1				
1	1				

3. так делать до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа.

A	B	C	1	2	3
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Выполнять логические операции для каждого столбца.

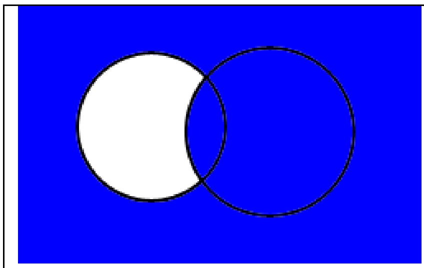
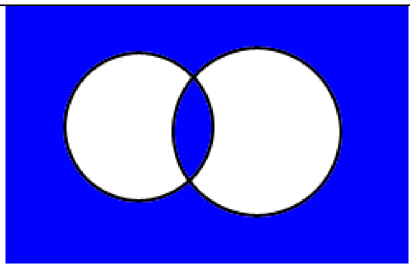
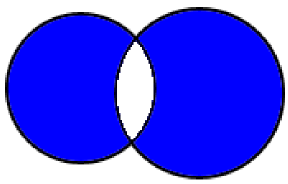
A	B	C	1	2	3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Законы алгебры логики

Логические выражения	**Алгебраические выражения**
Переместительный закон (коммутативный)	
$A \vee B = B \vee A$	$A + B = B + A$
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный закон (ассоциативный)	
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный закон (дистрибутивный)	
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	аналога нет
Закон инверсии или формулы де Моргана	
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
Закон двойного отрицания	
$\neg\neg A = A$	

Закон исключения констант	
Для логического сложения	
$A \vee 0 = A$	$A \vee 1 = 1$
Для логического умножения	
$A \wedge 0 = 0$	$A \wedge 1 = A$
Закон идемпотентности От лат. idem potens - равносильный	
Для логического сложения $A \vee A = A$	
Для логического умножения $A \wedge A = A$	
Закон противоречия	
$A \wedge \neg A = 0$ Невозможно, чтобы противоречивые высказывания были одновременно истинными	
Закон исключения третьего	
$A \vee \neg A = 1$ Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно высказывание истинно, а второе – ложно, третье не дано.	
Закон поглощения	
$A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$	
Закон исключения	
$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = A$ $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = A$	

Логические операции

Импликация implicatio –тесно связываю	Эквиваленция aequivalens – равноценное	Исключительное ИЛИ inversio – переворачиваю
Если …, то … Из … следует … влечет …	**Тогда и только тогда Необходимо и достаточно**	Операция логического отрицания
$\longrightarrow$	**≡, ↔, ~**	**⊕, xor**
Импликация двух высказываний ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В ложно.	**Эквиваленция** двух высказываний истинно тогда и только тогда, когда значения А и В совпадают.	**Исключительное ИЛИ** двух высказываний истинно тогда и только тогда, когда значения А и В не совпадают.
		

Таблицы истинности

A	B	A → B
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	B	A ≡ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Примеры

А = Данный четырехугольник квадрат. В = Около данного четырёхугольника можно описать окружность. **А → В =** **Если** данный четырёхугольник квадрат, **то** около данного четырёхугольника можно описать окружность.	А = 24 делится на 6. В = 24 делится на 3. **А ≡ В** = 24 делится на 6 **тогда и только тогда,** когда 24 делится на 3.	

Запись через основные логические операции

$A \to B = \bar{A} \vee B$	$A \equiv B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$ $A \equiv B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$	$A \oplus B \equiv \overline{A \vee B}$

Приоритет выполнения операций